尤度の比較と仮説検定とを比較する
～Ｐ値のことなど～

法数学勉強会
2011/02/19

京大(医)ゲノム医学センター
統計遺伝学分野
山田　亮
ryamada@genome.med.kyoto-u.ac.jp

今日の内容

- 確率と尤度
- 尤度を比較する　尤度比

ここまでが復習

- 尤度比を用いた「検定」: 尤度比検定
- 仮説検定
  - 『○○が××であるという仮説は棄却されない』

確率と尤度

- 色々な「仮説(条件)」があって
- 色々な「こと」が起きる

「トランプ」

- (1,2,...,12,13) x (4つのマーク)　= 52枚
- 6人の人に配ります
- マークは無視して、数字別の枚数を数えます

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	計
H1														
H2														
H3														
H4														
H5														
H6														
計														

確率は足し合わせると1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	計
H4	1	1	0	1	2	0	0	0	0	0	1	1	1	8

確率

1/8, 1/8, 0, 1/8, 2/8,0,..., 1/8, 1/8, 1/8

確率

- 仮説(条件)H1
- こと
  - D1,D2,.....
- H1でD1,D2,...が起きる確率
  - Pr(H1)(D1),Pr(H1)(D2),...
  - P(D1|H1),P(D2|H1),...とも書きますが。

確率2

- 仮説(条件)を変えてみよう H1→H2
- こと
  - D1,D2,.....
- H1ではなくて H2 でD1,D2,...が起きる確率
  - Pr(H2)(D1),Pr(H2)(D2),...
  - P(D1|H2),P(D2|H2),...とも書きますが。

確率と尤度

- 確率を「仮説(条件)」について見る
- 確率を「こと」について見る：尤度

	D1	D2	…	Dn	合計
H1	Pr(H1)(D1)	Pr(H1)(D2)	…	Pr(H1)(Dn)	1
H2	Pr(H2)(D1)	Pr(H2)(D2)	…	Pr(H2)(Dn)	1
…	…	…	…	…	…
Hm	Pr(Hm)(D1)	Pr(Hm)(D2)	…	Pr(Hm)(Dn)	1
合計					

同じ「こと」を起こす確率＝尤度を比べる

- 複数の「仮説(条件)」が
- 同じ「こと」を起こす確率＝尤度
- を比較する

- 比率
- 「仮説１は仮説２の○倍」

『尤度比検定』

- 尤度比は「○倍」

- ありそうなこと、ありそうもないことを「P値」で表す
  - 「P値」
  - 「その『仮説(条件件)』を信じたら、こんな『こと』はほとんど起きない(起きたとしてもその確率は『P値』未満でしょう」

仮説を検定してP値で答える

- 「その『仮説(条件)』を信じたら、こんな『こと』はほとんど起きない(起きたとしてもその確率は『P値』未満でしょう」
  - 対象とする『仮説(条件)』が1つ
    - 比べる相手の『仮説(条件)』は一つではない
  - 『こと』は観察されている

1番簡単な仮説検定
2x2分割表

	検出(A)	検出限界未満(a)	合計
検査機器P	75	21	96=75+21
検査機器Q	54	15	69=54+15
合計	129=75+54	36=21+15	165=96+69 =129+36

『PもQも検出率が0.78である』という『仮説(条件)』で、『たまたま「(75,21),(54,15)」という観察をする』確率は？

((75+21)から75を選ぶ選び方) x ((54+15)から54を選ぶ選び方) x

$$0.78^{75} \times 0.22^{21} \times 0.78^{54} \times 0.22^{15}$$

式は面倒くさいけれど、計算できなくはない

確率か尤度か

- 「仮説(条件)」を固定して、「こと」をいろいろにして調べるか
  - 『確率』
    - よくある「仮説検定」はこちら
- 「こと」を固定して、「仮説(条件)」をいろいろにして調べるか
  - 『尤度』

「仮説(条件)」と「こと」

- 「仮説(条件)」を固定する＝「こと」を色々に
  - 「(75,21),(54,15)」

「仮説(条件)」と「こと」

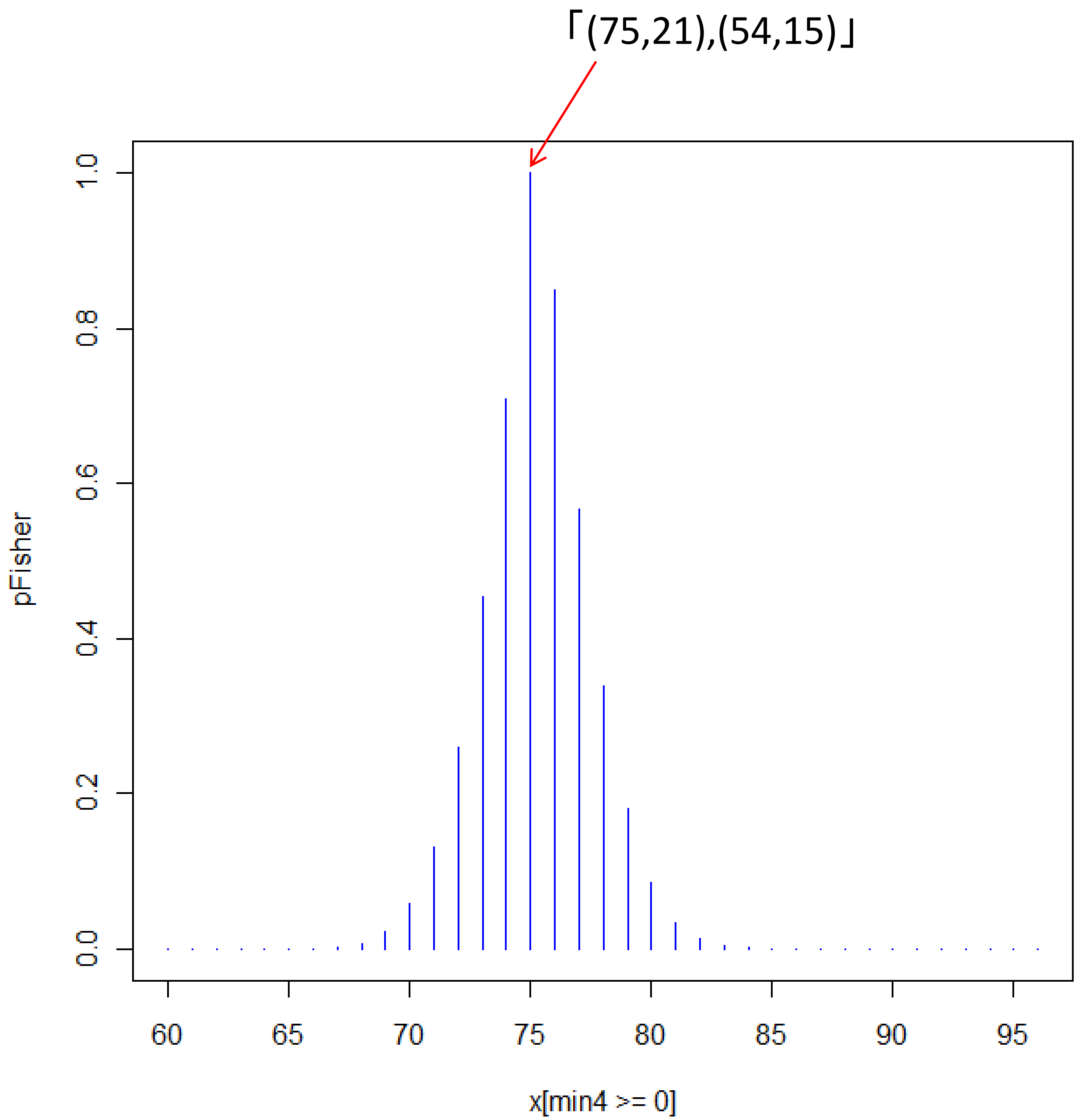
- 「仮説(条件)」を固定する＝「こと」を色々に
  - 「(75,21),(54,15)」
  - 「(75+1,21-1),(54-1,15+1)」
  - 「(75+2,21-2),(54-2,15+2)」
  - …
  - 「(75-1,21+1),(54+1,15-1)」
  - 「(75-2,21+2),(54+2,15-2)」
  - …

計算できる

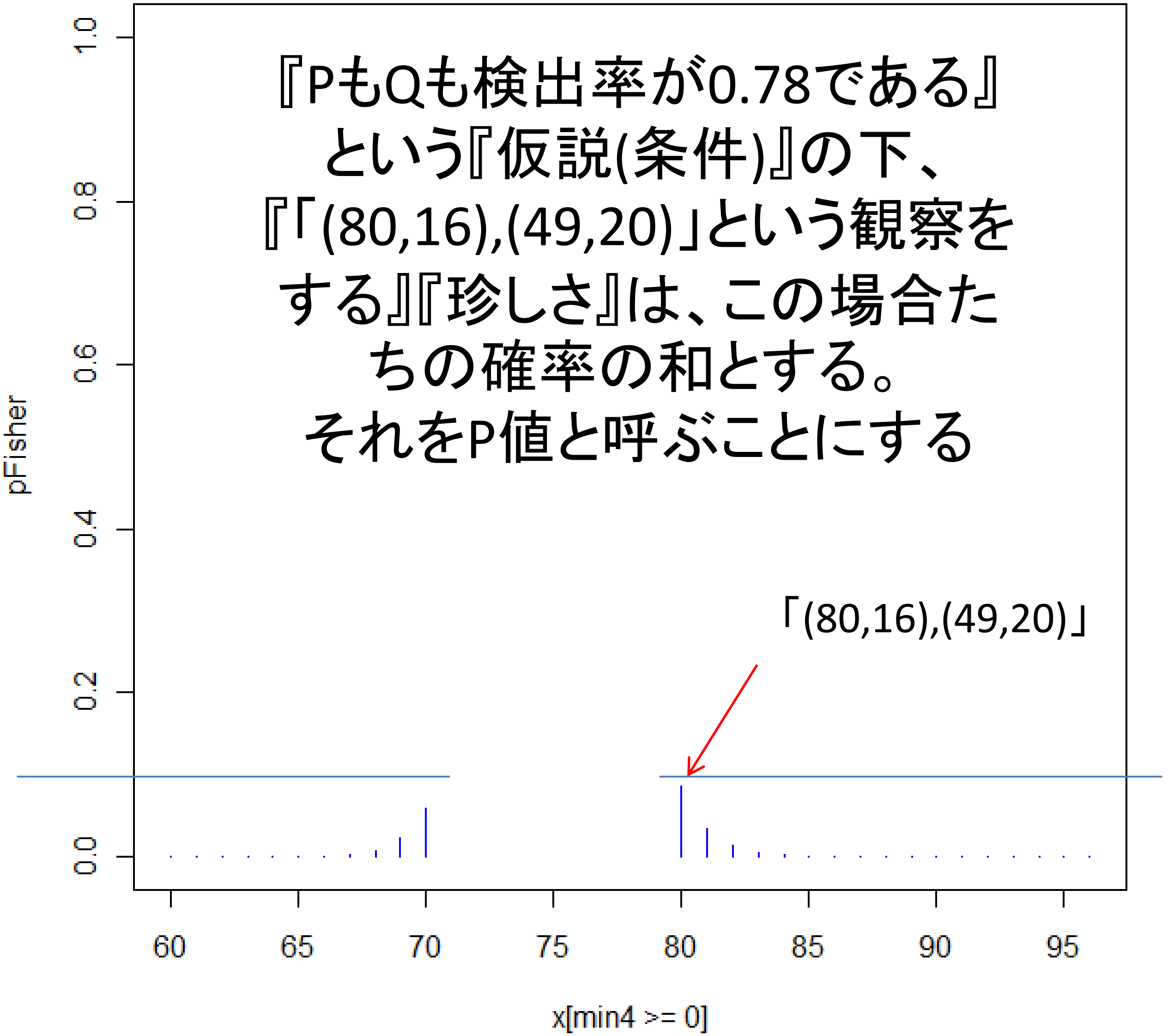
足して1になる

((75+21)から75を選ぶ選び方) x ((54+15)から54を選ぶ選び方) x

$$0.78^{75} \times 0.22^{21} \times 0.78^{54} \times 0.22^{15}$$


「(75,21),(54,15)」
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
pFisher
60
65
70
75
80
85
90
95
x[min4 >= 0]

『PもQも検出率が0.78である』
という『仮説(条件)』の下、
『「(80,16),(49,20)」という観察をする』『珍しさ』は、この場合たちの確率の和とする。
それをP値と呼ぶことにする

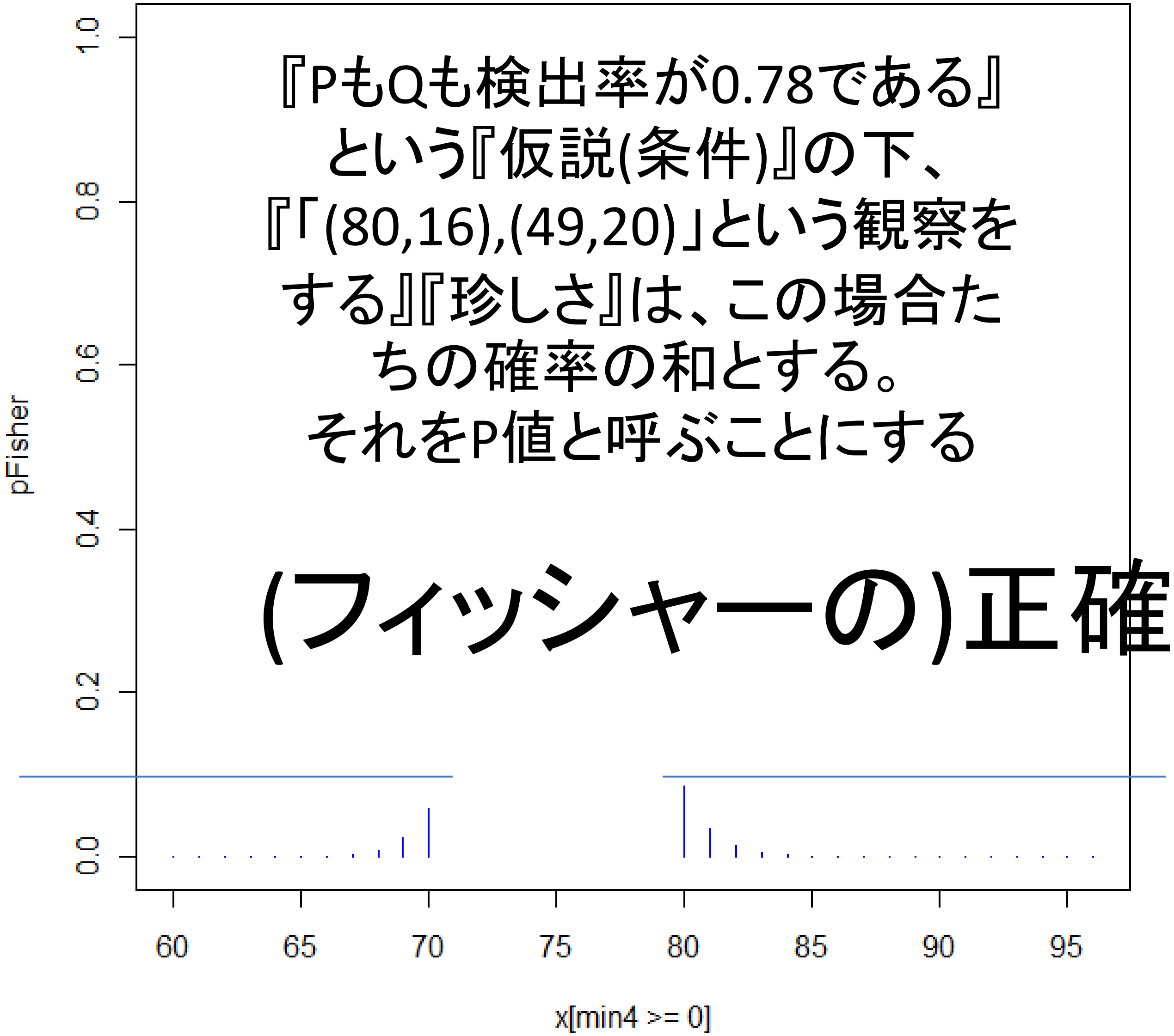


『PもQも検出率が0.78である』
という『仮説(条件)』の下、
『「(80,16),(49,20)」という観察をする』のと同じか、それより、
『珍しい』観察はどれ？

(フィッシャーの)正確確率検定

『PもQも検出率が0.78である』
という『仮説(条件)』の下、
『「(80,16),(49,20)」という観察を
する』『珍しさ』は、この場合た
ちの確率の和とする。
それをP値と呼ぶことにする

『PもQも検出率が0.78である』
という『仮説(条件)』の下、
『「(80,16),(49,20)」という観察
をする』のと同じか、それより、
『珍しい』観察はどれ？



((75+21)から75を選ぶ選び方) x ((54+15)から54を選ぶ選び方) x

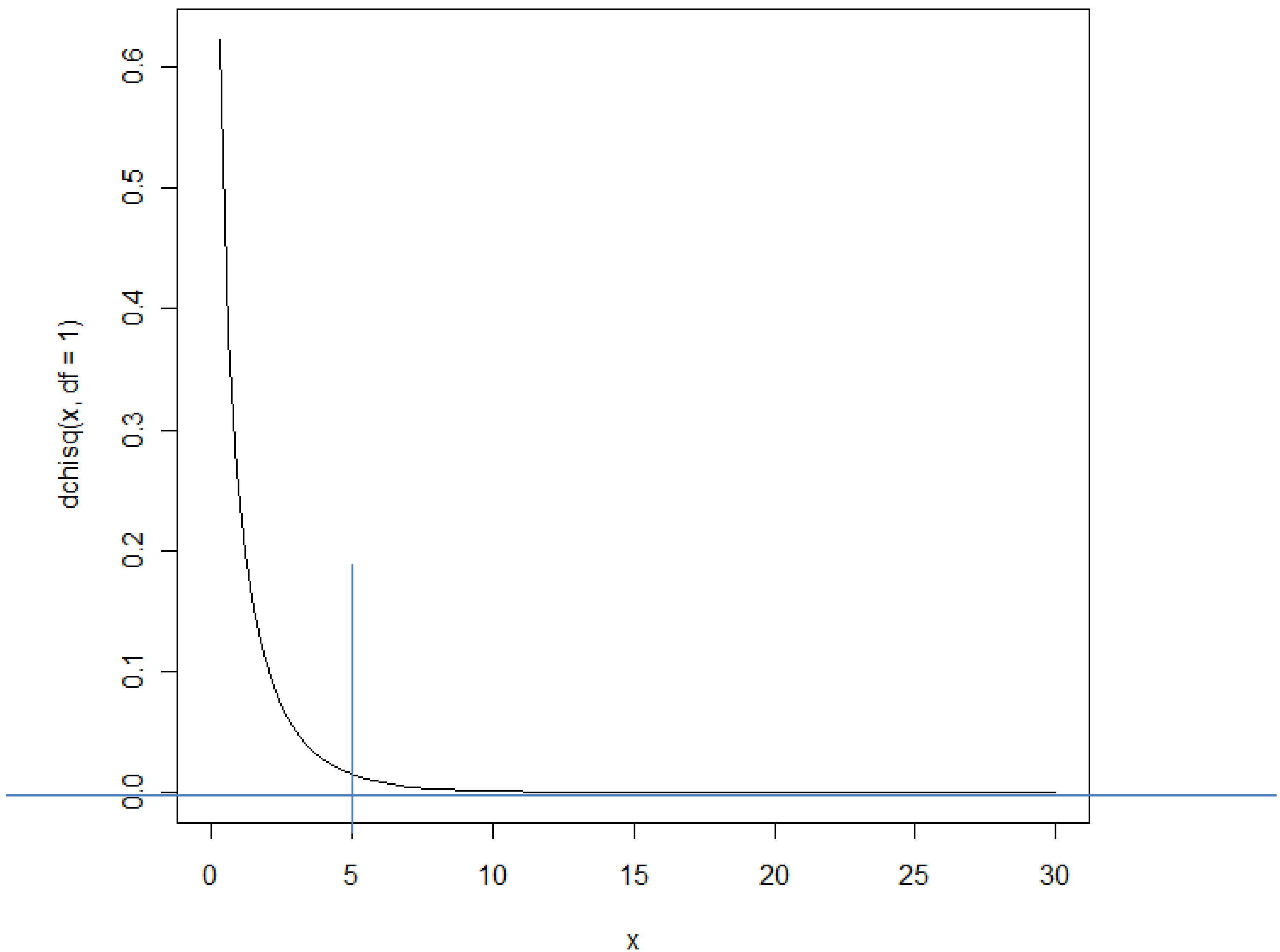
$$0.78^{75} \times 0.22^{21} \times 0.78^{54} \times 0.22^{15}$$

- 計算が面倒くさい
- 分割表が難しくなると、そもそも計算が終わらない

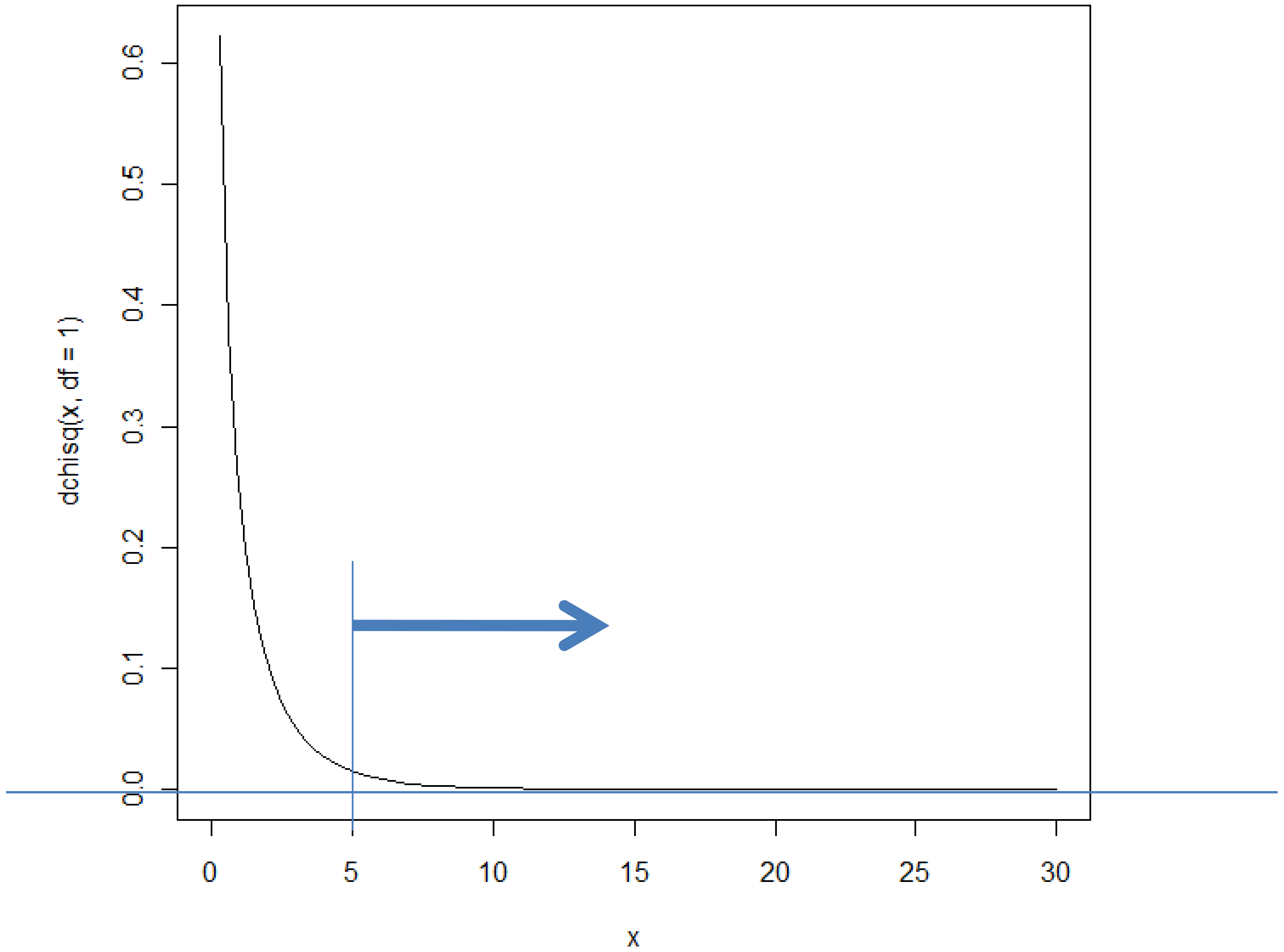
- 何か簡単な方法はない？

分割表の
行と列とが無関係であるという仮説のための
(ピアソンの)カイ二乗検定 χ^2

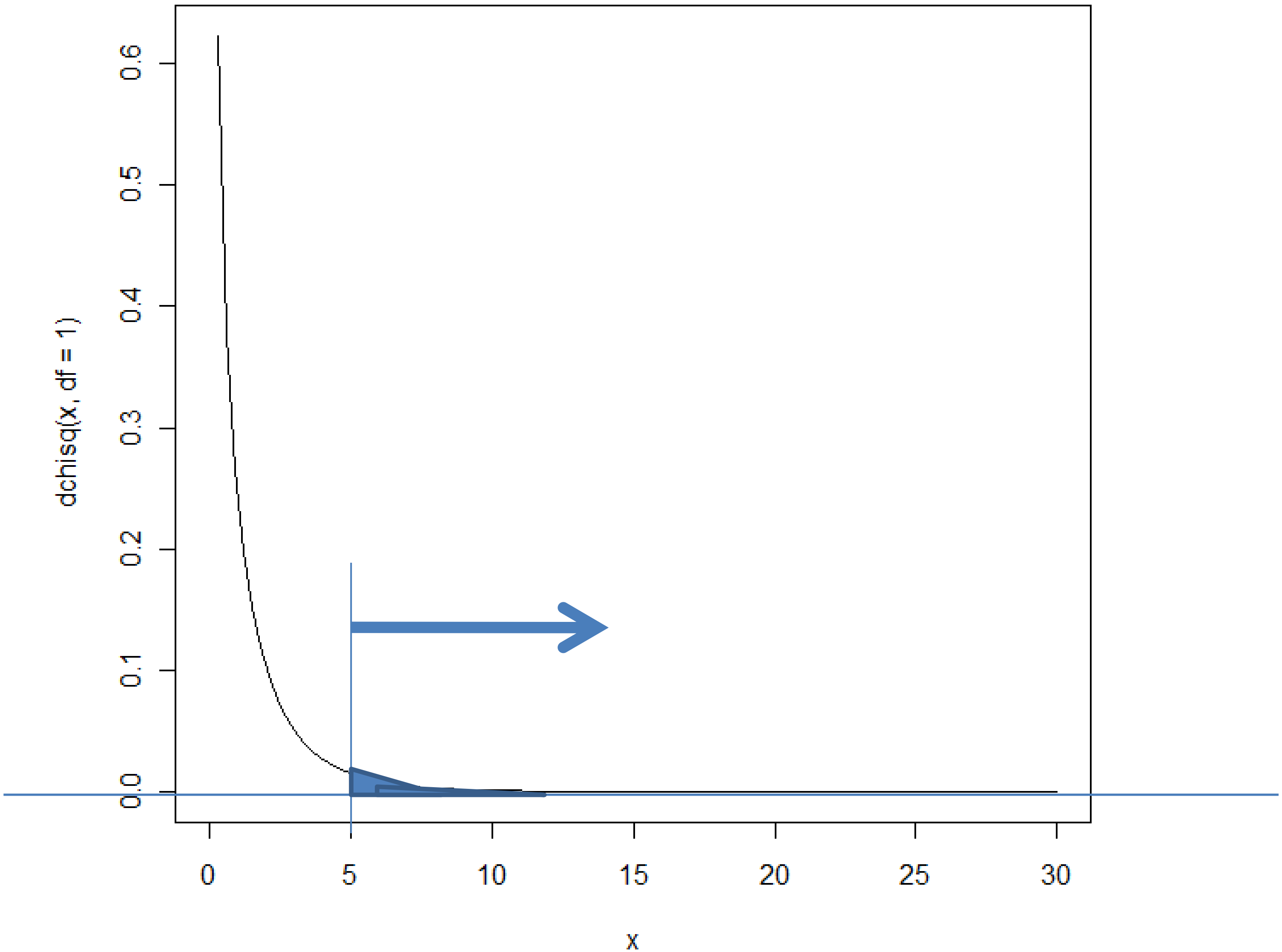
- ちょちょっと、＋－×÷の計算をするだけの便法
- 計算して出した値:「カイ二乗値」の大小で「P値」を求める



カイ二乗値



カイ二乗値



カイ二乗値

「仮説(条件)」と「こと」

- 「こと」を固定する＝「仮説」を色々に
  - P、Qともに「成功率=0.78」
  - P、Qの成功率が、「p」と「q」
  - 「p=0.78,q=0.78」

「仮説(条件)」と「こと」

- 「こと」を固定する＝「仮説」を色々に
  - P、Qともに「成功率=0.78」
  - P、Qの成功率が、「p」と「q」
  - 「p=0.78,q=0.78」
  - 「p=0.78+0.1,q=0.78-0.1」
  - 「p=0.78+0.2,q=0.78-0.2」
  - …
  - 「p=0.78-0.1,q=0.78+0.1」
  - 「p=0.78-0.2,q=0.78+0.2」
  - …

- 「p=0.78,q=0.78」
- 「p=0.78+0.01,q=0.78-0.01」
- 「p=0.78+0.02,q=0.78-0.02」
- …
- 「p=0.78-0.01,q=0.78+0.01」
- 「p=0.78-0.02,q=0.78+0.02」
- …

数えきれない「仮説(条件)」

- 「ここぞ」という仮説は何か？
  - P、Qともに「成功率=0.78」
    - これは、外せない

数えきれない「仮説(条件)」

- 「ここぞ」という仮説は何か？
  - P、Qともに「p=q=0.78」
    - これは、外せない
  - もう1つの仮説をとるとしたら。
    - 「p=80/96, q=49/69」

	検出(A)	検出限界未満(a)	合計
検査機器P	80	16	96
検査機器Q	49	20	69
合計	129	36	165

２つの「仮説(条件)」、１つの「こと」

- ２つの確率～尤度が計算できる
- ２つの尤度は比較できる
  - 帰無仮説の尤度： L_o
  - もっとも観察データを「尊重」した仮説の尤度： L_a
- 尤度比 $\frac{L_a}{L_o}$

$$-2 \times \log(\frac{L_a}{L_o}) = \chi^2$$

尤度比検定はいつ使う？

- 『帰無仮説』を棄却するための方法
- 『もっとも観察データを「尊重」した仮説』を考える
  - 『最大限に動かした仮説』

尤度比検定はいつ使う？

- 『帰無仮説』を棄却するための方法
- 『もっとも観察データを「尊重」した仮説』を考える
  - 『最大限に動かした仮説』
- 何を、動かした？
  - 変数
    - たとえば、pとqの差

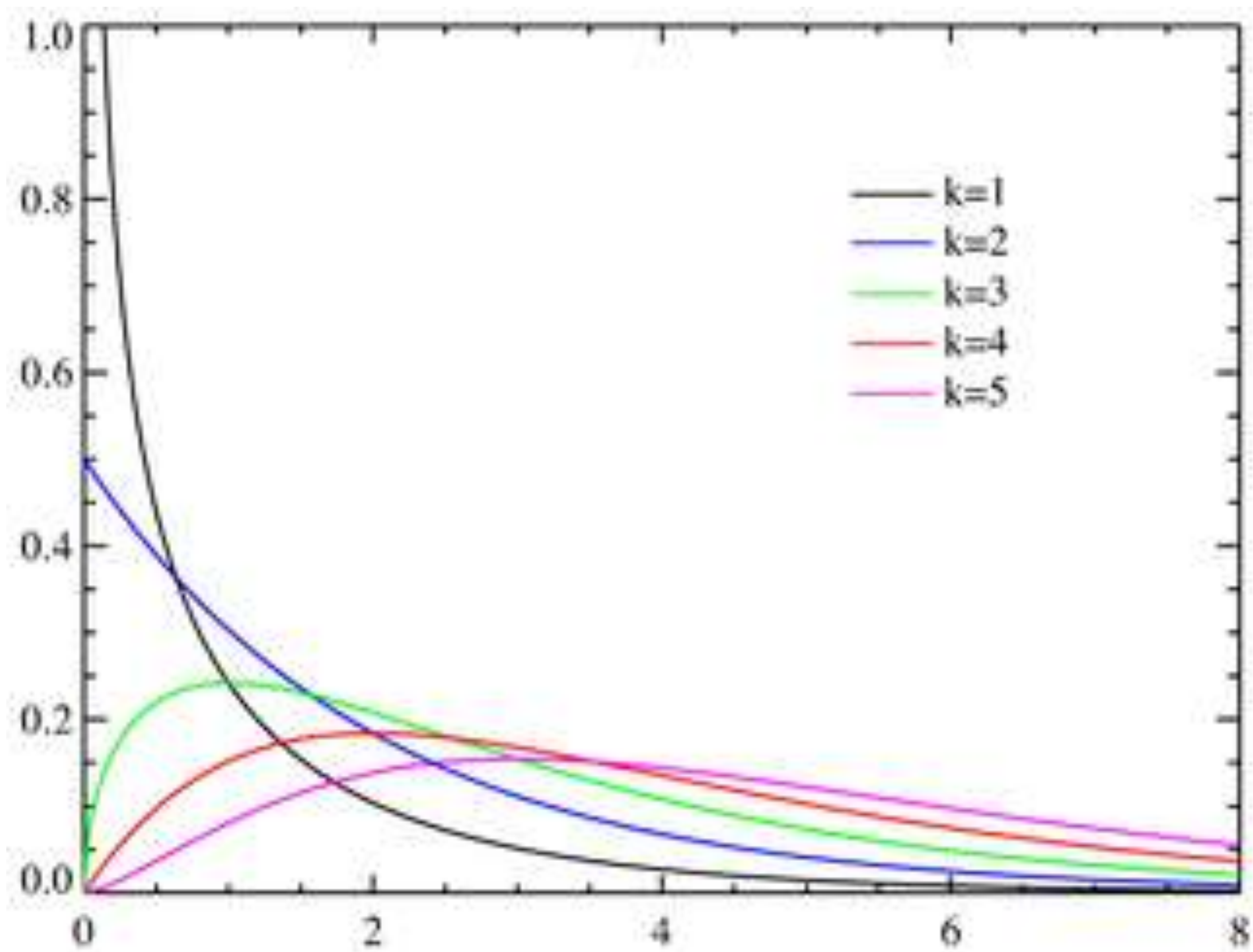
変数とは？

- 帰無仮説の変数
  - 世界には、たった1つの変数
    - P,Qに共通する『成功率』という変数
- 対立仮説の変数
  - 『もっとも観察データを「尊重」した仮説』を扱うには、帰無仮説よりも変数を多く使う必要がある
  - 変数の多い『モデル』
    - P,Qの中間的な『成功率』という変数と
    - P,Qの違いを説明するための変数

変数

- モデルの変数は、「いろいろな値」をとる
- モデルを構成する変数の数はいくつでもよい
- 変数の数が多いと
  - 「こと」が起きる尤度は高くなる
- 「こと」をもっともよくするような「値」がある
  - 変数の最尤推定値

増やした変数の数を「自由度」と言う
自由度が大きくなると、同じχ2値でも珍しくなくなる



仮説の変数が自由か不自由か

- 仮説が複数の変数でできていて、その変数の値が「固定」されている場合と、「動かしてもよい場合」とを比較したいときに、「棄却検定」

- 変数の値が固定された１個と、固定されたもう1個とで比較したいときには、「変数」が自由でないので、χ2分布に持ち込まれず、尤度比→「〇倍」で考える

実例…